උසස් පෙළ සංයුක්ත ගණිතය විෂය නිර්දේශය සඳහා සැකසුනු මෙම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයීමෙන් ඔබගේ දැනුම දියුණු කර ගැනීමත් ඉදිරියේදී ඔබගේ දක්ෂතාව වර්ධනය කර ගැනීමත් අපේක්ෂා කෙරේ.

උසස් පෙළ සංයුක්ත ගණිතය: 1 වෙනි පත්‍රය : Part A

1. n යනු ධන නිඛිලයක් වන විට $1+2+3+\ldots+n+(n+1)+n+\ldots+3+2+1$ යන ප්‍රකාශනය සහ $(n+1)^2$ තුල්‍ය බව සාධනය කිරීමට ගණිත අභ්‍යුහන මූල ධර්මය භාවිත කරන්න.

2. **ORGANIC** යන වචනයෙහි අක්ෂර සියල්ලම යොදා ගෙන සෑදිය හැකි වෙනස් පිළියෙල කිරීම් ගණන සොයන්න. මෙම පිළියෙල කිරීම්වලින් කොපමණක ප්‍රාණාක්ෂර(vowels) එක ළඟ පවතියිදැයි සොයන්න.

3. $(1+ax)^n$ සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියන්න. මෙහි a යනු ධන නියතයක්ද n යනු ධන නිඛිලයක්ද වේ.

   $(1+ax)^n = c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_rx^r + \ldots$ යැයි ගනිමු. c_k යනු මෙම ප්‍රසාරණයේ පදවල විශාලතම සංගුණකය වේ නම්, c_k සහ c_{k-1} සංසන්දනයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ k යනු $\dfrac{a(n+1)}{1+a}$ හි නිඛිලමය කොටස බව පෙන්වන්න.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2} = 8$ බව පෙන්වන්න.

5. $y = \ln \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ ශ්‍රිතයේ අවකලන සංගුණකය සොයන්න.

   එනයින්, $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ සොයන්න.

6. $y = x(x^2-3)$ ශ්‍රිතයේ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සොයා ඒවායේ ස්වභාවය නිර්ණය කරන්න.

7. $xy = c^2$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය සලකන්න. මෙහි c යනු නිශ්ශුන්‍ය නියතයකි. වක්‍රය මත වූ (ct, ct^{-1}) ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

   Ox සහ Oy අක්ෂ දෙකට සමාන ආනතියක් සහිතව වක්‍රයට ඇඳිය හැකි ස්පර්ශක ප්‍රමාණය නිර්ණය කරන්න.

8. ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ $A(3,2)$, $B(-1,-1)$ සහ $C(-1,5)$ වේ. A ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ වන මධ්‍යස්ථයට සම්මුඛ පාදය හමු වන ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
   එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ ABC යනු සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් වන බව නිර්ණය කරන්න.

9. $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$ වෘත්තයේ අරය සහ කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
   $A(a,0)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට මෙම වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක ප්‍රලම්බ වේ නම් a සඳහා විය හැකි අගය සියල්ලම සොයන්න.

10. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

    $(b+c)\sin\dfrac{A}{2} = a\sin\left(\dfrac{A}{2}+B\right)$ වන බව *sine* සූත්‍රය යෙදීමෙන් පෙන්වන්න.

OpenLearning © University of Sri Jayewardenepura Powered by Japura Media

උසස් පෙළ සංයුක්ත ගණිතය: 1 වෙනි පත්‍රය : Part B

11.(a) $f(x)=ax^2+bx+c$ වර්ගජ ශ්‍රිතයෙහි මූල α සහ β යැයි ගනිමු. $\alpha+\beta$ සහ $\alpha\beta$ සඳහා ප්‍රකාශන මෙම වර්ගජ ශ්‍රිතයෙහි සංගුණක ඇසුරෙන් ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

සර්වසම නොවන $y=ax^2+bx-c$ සහ $y=ax^2+cx+b$ වර්ගජ ශ්‍රිත දෙකට පොදු මූලයක් පවතියි ම නම් පමණක් $a+b+c=0$ වන බව පෙන්වන්න.

ඒවායේ ඉතිරි මූල දෙනෙක් තෘප්ත වන වර්ගජ ශ්‍රිතය ගොඩ නඟන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $ax^2-4x+c=0$ සහ $3cx^2+cx-4=0$ වර්ගජ සමීකරණ දෙකට පොදු මූලයක් පවතින පරිදි a සහ c නියත නිර්ණය කරන්න.

ඒවායේ ඉතිරි මූල දෙනෙක් තෘප්ත වන වර්ගජ සමීකරණය ද සොයන්න.

(b) ශේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$p(x)=x^3+ax^2+b$ සහ $q(x)=ax^3+bx^2+x-a$ යැයි ගනිමු. මෙහි a සහ b යනු නිශ්ශූන්‍ය නියත වේ. මෙම බහුපදවලට පොදු සාධකයක් පවතියි නම් එම පොදු සාධකය $(b-a^2)x^2+x-a(1+b)$ හි ද සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

එනයින්, x^3+2x^2+5 සහ $2x^3+5x^2+x-2$ බහුපදවලට පොදු සාධකයක් පවතියි දැයි නිර්ණය කරන්න.

12.(a)(i) ගණිත අභ්‍යුහන මූල ධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $V(1)=0$ සහ $r\geq 2$ වන විට, $V(r)-V(r-1)=r(r+1)$ වේ නම්,

$V(r)=\dfrac{r}{3}(r+1)(r+2)$ බව ලබා ගන්න.

$r\geq 1$ සඳහා $r\times u_r=V(r)$ ලෙස අර්ථ දැක් වේ. $r\geq 1$ සඳහා $u_r=f(r+1)-f(r)$ වන පරිදි f නම් ශ්‍රිතයක් සොයන්න.

එනයින්, $\sum_{r=1}^{n} u_r$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණියෙහි අභිසාරිතාවය පිළිබඳව ඔබගේ අදහස් ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) $y=|x-2|$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒනයින්, $y=1-|x-2|$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් ඉදිරිපත් කරන්න.

එම සටහනෙහිම $x-3y-3=0$ හි ප්‍රස්තාරය ඇඳ $3|x-2|+x\leq 6$ තෘප්ත කරන සියලු තාත්ත්වික x නිර්ණය කරන්න.

13.(a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ නම් A^2 සොයන්න.

OpenLearning © University of Sri Jayewardenepura Powered by Japura Media

A^2 යන්න සුදුසු අදිශයක් වන λ සමගින් λI_2 ලෙස ඉදිරිපත් කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි I_2 යනු 2 ගණයේ ඒකක න්‍යාසය වේ.

එනයින්, A^{-1} නිර්ණය කරන්න.

$2x + y = 3$
$x - 2y = 4$ සමගාමී සමීකරණ පද්ධතිය න්‍යාස ආකාරයෙන් ඉදිරිපත් කර එහි විසඳුම ලබා ගන්න.

(b) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාපාංකය $|z|$ සහ විස්තාරය $\arg(z)$ අර්ථ දක්වන්න.

z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වේ නම් $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ සහ $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ බව පෙන්වන්න.

ආගන්ඩ් සටහනේ P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍යවලින් z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් නිරූපණය කරයි. P_1 ලක්ෂ්‍යය වටා P_1P_2 රේඛා ඛණ්ඩය වාමාවර්තව සෘජු කෝණයක් භ්‍රමණයෙන් ලැබෙන P_1P_3 රේඛා ඛණ්ඩයේ P_3 ලක්ෂ්‍යයෙන් $(1-i)z_1 + i z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වන බව පෙන්වන්න.

ආගන්ඩ් සටහනක A ලක්ෂ්‍යයෙන් $1+3i$ යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. $OABC$ යනු සමචතුරස්‍රයක් ද O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය ද වේ. මෙවිට B සහ C ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිර්ණය කරන්න.

14.(a) $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ යැයි ගනිමු. මෙහි a සහ b යනු නියතද, $0 < x$ ද වේ. $\frac{d}{dx}y$ සහ $\frac{d^2}{dx^2}y$ සොයා

$x^2\frac{d^2}{dx^2}y + x\frac{d}{dx}y + y$ යන්න x න් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

$x = 1$ වන විට $\frac{d}{dx}y = 1$ සහ $\frac{d^2}{dx^2}y = -2$ වේ නම් a සහ b හි අගය සොයන්න.

(b) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - a}$ යන ශ්‍රිතය සලකන්න. මෙහි a යනු තාත්ත්ත්වික නියතයකි. පහත ඒවා පෙන්වන්න.

(i) $a^2 < 16$ වේ නම් මෙම ශ්‍රිතයට ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය නොමැති බවත් දෙන ලද ඕනෑම තාත්ත්ත්වික y_o අගයක් සඳහා $y_o = f(x_o)$ වන පරිදි තාත්ත්ත්වික x_o පවතින බව;

(ii) $a^2 \geq 16$ වේ නම් මෙම ශ්‍රිතයට ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය ඇති බවත් දෙන ලද ඕනෑම තාත්ත්ත්වික y_o අගයක් සඳහා $y_o = f(x_o)$ වන පරිදි තාත්ත්ත්වික x_o නොපවතින බව;

$a = 5$ අවස්ථාව සඳහා ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් ඔබගේ **(ii)** කොටසෙහි පිළිතුර සත්‍යාපනය කරන්න.

15.(a) සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන්,

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 2}}\,dx$$ සොයන්න.

(b) $x(1 - x^2) = (x-2)(1+x^2) + 2$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

එනයින්, $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}\,dx$ සොයන්න.

OpenLearning © University of Sri Jayewardenepura Powered by Japura Media

$[0,1]$ ප්‍රාන්තරය පුරා $x(1-x^2)\geq 0$ බව පෙන්වා ඉහත අනුකලය සැලකීමෙන්, $\pi \geq 3$ බව ලබා ගන්න.

15.(c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යෙදීමෙන්, n යනු ධන නිඛිලයක් වන විට,

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$ බව පෙන්වන්න.

මෙම ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{\pi}{8}$ බවත් පෙන්වන්න.

16.(a) (x_o, y_o) ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax+by+c=0$ රේඛාවට ඇඳි ලම්බය සහ එම රේඛාව හමු වන ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සුදුසු පරාමිතික අගයක් සමගින්
(x_o+at, y_o+bt) ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $C(2,3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $A(6,3)$ සහ $B(2,7)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාවට ඇඳි ලම්බය සහ එම රේඛාව හමු වන ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ABC යනු සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව **අපෝහනය කරන්න**.

(b) පළමු පාදකයෙහි කේන්ද්‍රය පිහිටි වෘත්තයක් Ox සහ Oy අක්ෂ ස්පර්ශ කරයි. වෘත්තයේ අරය a වේ නම් එහි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න.
මෙම වෘත්තය තව දුරටත් $3x-4y-12=0$ රේඛාව ද ස්පර්ශ කරයි නම් වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

$3x-4y-12=0$ රේඛාව මත ඉහත වෘත්තයෙහි ප්‍රතිබිම්බයෙහි සමීකරණය ද සොයන්න.

17.(a) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් සූත්‍රය ප්‍රකාශ කරන්න.

$A+B+C=\pi$ වේ නම්, **(i)** $\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$ බවත්

(ii) $\sin\left(\frac{A+B-C}{2}\right)=\cos C$ බවත් පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක කෝණ වන A, B සහ C සඳහා

$\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}$ සහ $\tan\frac{C}{2}$ සමාන්තර ශ්‍රේණියක අනුයාත පද වේ නම් $\cos A, \cos B$ සහ $\cos C$ ද එසේම වන බව පෙන්වන්න.

(b) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ වේ නම්, $x^2+y^2+z^2=1-2xyz$ බව සාධනය කරන්න.

(c) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}(2x)=\frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

* * *

OpenLearning Powered by Japura Media