

වෙ/පැ/එම් නිර්දේශය - புதிய/பழைய பாடத்திட்டம் - New/Old Syllabus

NEW/OLD

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2020
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2020
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2020

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 T I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීමේ කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

கட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள் :

- * இவ்வினாத்தாள் பகுதி A (வினாக்கள் 1 - 10), பகுதி B (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
- * பகுதி A :
எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- * பகுதி B :
ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
- * ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A இன் விடைத்தாளானது பகுதி B இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- * வினாத்தாளின் பகுதி B ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(11) உயர் கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்

எழுத்தில்

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்

1

பரிசீலித்தவர்:

2

மேற்பார்வை செய்தவர்

7.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \text{ எனின்,} \\ -x^2 + 1, & 0 < x < 1 \text{ எனின்,} \\ x - 1, & 1 \leq x \text{ எனின்} \end{cases}$$

எனக் கொள்வோம். $f(x)$ ஆனது $x=0$ இல் வகையிடத்தக்கது எனவும் $x=1$ இல் வகையிடப்பட முடியாதது எனவும் காட்டுக.

$x \neq 1$ இற்கு $f'(x)$ ஐ எழுதுக.

8. $x=0$ ஆக இருக்கும்போது $y=1$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} + 2y = x$ ஐத் தீர்க்க.

13. ஒரு நேர் நிறைவேண் சுட்டிக்குத் த மோய்வரின் தேற்றத்தை எடுத்துரைத்து, நிறுவுக.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $\cos \theta \neq 0$ இற்கு

$$\frac{\cos 5\theta}{\cos \theta} = 16 \cos^4 \theta - 20 \cos^2 \theta + 5 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இப்பேரைப் பயன்படுத்தி,

(i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 5\theta \tan \theta \, d\theta$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

(ii) இருபடிச் சமன்பாடு $16x^2 - 20x + 5 = 0$ இன் மூலங்கள் $\cos^2 \frac{\pi}{10}$ எனவும் $\cos^2 \frac{3\pi}{4}$ எனவும் காட்டுக.
 $\sec^2 \frac{\pi}{10} + \sec^2 \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}$ என உய்த்தறிக.

14.(a) C_1 ஆனது நீள்வளையம் $x^2 + 6y^2 = 25$ எனவும் C_2 ஆனது பரவளைவு $y^2 = 4x$ எனவும் கொள்வோம். அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காட்டி C_1, C_2 ஆகியவற்றின் வரைபுகளின் பரும்படிப் படங்களை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

C_1, C_2 ஆகிய வளையிகளினால் வரைப்புற்ற முதலாம் கால்வட்டத்தில் இருக்கும் பிரதேசம் R இன் பரப்பளவைக் காண்க.

மேலும் பிரதேசம் R ஐ x -அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவையும் காண்க.

(b) ஒரு வளையிக் குடும்பம் வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+4y-1}{x+2y-3}$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது.

பிரதியீடு $v = x + 2y$ ஐப் பயன்படுத்தி, தரப்பட்ட வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\frac{dv}{dx} = \frac{5(v-1)}{(v-3)}$ ஆக உருமாற்றப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, தரப்பட்ட வளையிக் குடும்பத்தினால் திருப்தியாக்கப்படும் சமன்பாட்டினை x, y ஆகியவற்றில் காண்க.

மேலும், இவ்வளையிக் குடும்பத்தின் நிமிரகோணக் கடவைகளினால் திருப்தியாக்கப்படும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினைப் பெறுக.

15.(a) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a > 0$.

$$n \geq 2 \text{ இற்கு } 2(n-1)a^2 I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இதிலிருந்து, $\int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^4}$ ஐக் காண்க.

(b) f என்பது $(x^2 + 1)f''(x) + 2xf'(x) + f(x) = 0$ ஆகுமாறு உள்ள ஒரு சார்பெனக் கொள்வோம்.

$$(x^2 + 1)f'''(x) + 4xf''(x) + 3f'(x) = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$f(0) = 1 \text{ எனவும் } f'(0) = 2 \text{ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.}$$

$f(x)$ இன் மக்குளோரின் தொடரை x இன் ஏறு வலுக்களில் x^3 இடம்பெறும் உறுப்பு (உட்பட) வரைக்கும் காண்க.

இதனைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{0.1} f(x) dx$ இற்கு ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

16. S என்பது நீள்வளையம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனக் கொள்வோம்.

$P \equiv (a \cos \theta, b \sin \theta)$, $Q \equiv (a \cos \phi, b \sin \phi)$ ஆகிய புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} \cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + \frac{y}{b} \sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

S இற்கு P இல் வரையப்பட்டுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டினை எழுதுக.

S இற்கு P, Q ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் ஒரு புள்ளி R இல் இடைவெட்டுகின்றன.

$$R \equiv \left(a \frac{\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}, b \frac{\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)} \right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இப்போது S மீது P, Q ஆகிய புள்ளிகள், $\phi = \theta - \frac{\pi}{3}$ ஆக இருக்குமாறு, உள்ளனவெனக் கொள்வோம். R ஆனது நீள்வளையம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4}{3}$ மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

S இற்கு P இல் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிக்குச் சமாந்தரமாக நீள்வளையம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4}{3}$ இற்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17.(a) $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{5 + \sin x}}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $0 \leq x \leq \pi$ இற்கு $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பருமப்படியாக வரைக.

(b) பின்வரும் அட்டவணை 0 இற்கும் 6 இற்குமிடையே நீளம் 1 ஆகவுள்ள ஆயிடைகளில் அமைந்த x இன் பெறுமானங்களுக்குச் சார்பு $f(x) = \ln(3 + x^2)$ இன் பெறுமானங்களை நான்கு தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகத் தருகின்றது.

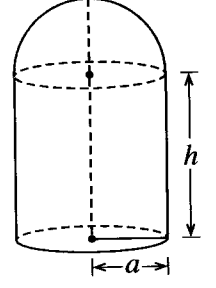
x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.0986	1.3863	1.9459	2.4849	2.9444	3.3322	3.6636

சிம்சனின் நெறியைப் பயன்படுத்தி, $I = \int_0^6 \ln(3 + x^2) dx$ இற்கு ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\int_0^6 \ln(3e + ex^2) dx$ இற்கு ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

Department of Examinations - Sri Lanka

3. ஆரை a ஐயும் அடர்த்தி ρ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான அரைக்கோளத்தை ஆரை a ஐயும் உயரம் h ஐயும் அடர்த்தி 2ρ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான செவ்வட்ட உருளையில் உருவில் காட்டியுள்ளவாறு விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு திண்மப் பொருள் S ஆக்கப்பட்டுள்ளது. S ஆனது அடர்த்தி ρ_1 ஐ உடைய ஓர் ஏகவினத் திரவத்தில், அதன் அச்ச நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு, அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. உருளை அரைக்கோளத்திற்கு மேலே இருக்கும்போது அது அரைக்கோளம் மாத்திரம் திரவத்தில் முற்றாக அழிந்தும் அரைக்கோளம் உருளைக்கு மேலே இருக்கும்போது அது உருளை மாத்திரம் திரவத்தில் முற்றாக அமிழ்ந்தும் இருக்குமாறு மிதக்கின்றது.



$$h = \frac{2a}{3} \text{ எனவும் } \rho_1 = 3\rho \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

4. நேரம் t இல் ஒரு துணிக்கை P இன் தானக் காவி $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} - 2\sin t\mathbf{k}$ இனால் தரப்படுகின்றது. நேரம் t இல் P இன் வேகத்தையும் கதியையும் கண்டு, வேகம் x -அச்சுடன் ஒரு மாறாக் கோணத்தை ஆக்குகின்றதெனக் காட்டுக.

மேலும், நேரம் t இல் P இன் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

13. திணிவு m உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது ஒரு புள்ளி O இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிக் கதி u உடன் எறியப்படுகின்றது. அது பருமன் mkv^2 ஐ உடைய ஒரு தடுக்கும் விசைக்கு உட்படுகின்றது; இங்கு v ஆனது துணிக்கையின் கதியாகும்.

P இன் மேன்முக இயக்கத்திற்கு $\frac{dv}{dt} + g + kv^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஆனது O இற்கு மேலே அதன் ஆகவுங் கூடிய உயரம் H ஐ அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரம்

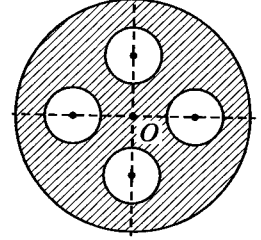
$\frac{1}{\sqrt{gk}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{g}} u \right)$ எனவும் $H = \frac{1}{2k} \ln \left(1 + \frac{ku^2}{g} \right)$ எனவும் காட்டுக.

மேலும், P ஆனது O இற்குத் திரும்பி வரும்போது அதன் வேகத்தை u, k, g ஆகியவற்றில் காண்க.

14. ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது இயங்கும் சம திணிவும் சம ஆரையும் உள்ள A, B என்னும் இரு ஒப்பமான சீரான கோளங்கள் ஒன்றோடொன்று மோதுகின்றன. மோதுவதற்குச் சற்று முன்னர் A, B ஆகியவற்றின் வேகங்கள் முறையே $u(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}), u(-\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j})$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை A, B ஆகியவற்றின் மையங்களைத் தொடுக்கும் கோடு \mathbf{i} இற்குச் சமாதானமாகும். A இற்கும் B இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகும். மொத்தலுக்குச் சுற்றுப் பின்னர் A, B ஆகியவற்றின் வேகங்களைக் கண்டு அவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையெனக் காட்டுக.

மேலும், A இலிருந்து B மீது உள்ள கணத்தாக்கத்தையும் மோதுகை காரணமாக இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியில் உள்ள இழப்பையும் காண்க.

15. ஒரு சீரான சில்லானது மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய ஒரு தட்டிலிருந்து ஆரை $\frac{a}{4}$ ஐ உடைய நான்கு சிறிய சீரவசமத் தட்டுகளை நீக்கிப் பெற்ற வடிவத்தைக் கொண்டுள்ளது. நான்கு சிறிய தட்டுகளினதும் மையங்கள் சில்லின் இரு செங்குத்தான விட்டங்களின் மீது O இலிருந்து தூரம் $\frac{a}{2}$ இல் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு உள்ளன.



O இனாடாகச் சில்லின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சப் பற்றிச் சில்லின் சடத்துவத் திருப்பம் $\frac{55}{96} Ma^2$ எனக் காட்டுக; இங்கு M ஆனது சில்லின் திணிவாகும்.

சில்லு ஒரு கரடான கிடை நிலத்தின் மீது வைக்கப்பட்டு, அது கோணக் கதி இல்லாமல் கதி u உடன் வழக்கிச் செல்லத் தொடங்குமாறு, அதற்கு ஒரு கிடைக் கணத்தாக்கு தரப்படுகின்றது.

சில்லு நேரம் T இற்கு வழக்கிக் கொண்டும் உருண்டு கொண்டும் சென்று பின்னர் முற்றாக உருளத் தொடங்குகின்றது. T ஐ u, g, μ ஆகியவற்றிற் காண்க; இங்கு μ ஆனது சில்லுக்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகமாகும்.

16. ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறி X கீழே தரப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது:

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	p	q	r	0.2	0.1

இங்கு p, q, r ஆகியன மாறிலிகள்.

$E(X) = 1.5$ எனவும் $E(X^2) = 4.1$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.

பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் காண்க:

(i) p, q, r ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள்

(ii) $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{7}{2}\right)$

(iii) $\text{Var}(X)$

(iv) $E(3 - 2X)$ உம் $\text{Var}(3 - 2X)$ உம்

X_1, X_2 ஆகியன மேலே தரப்பட்டவாறு X இன் அதே நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கொண்ட இரு சார்பு பின்னக எழுமாற்று மாறிகள் எனவும் $Y = X_1 + 2X_2$ எனவும் கொள்வோம்.

(v) $k = 0, 1, 2, 3, 4$ இற்கு $P(Y = k)$ ஐக் கண்டு, இதிலிருந்து, $P(Y \geq 5)$ ஐக் காண்க.

(vi) $E(Y)$ இன் பெறுமானத்தை எழுதுக.

17.(a) ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{15}{2}x^2(1-x^2) & , 0 \leq x \leq 1 \text{ இற்கு} \\ 0 & , \text{அவ்வாறு இல்லாதபோது} \end{cases}$$

இனால் தரப்படும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஐ உடையது. $E(X), Var(X)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

மேலும், $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$ ஐயும் காண்க.

Y ஆனது $Y = 3X - 2$ இனால் வரையறுக்கப்படும் எழுமாற்று மாறியெனக் கொள்வோம்.

$E(Y), Var(Y)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(b) ஒரு குறித்த கம்பனியின் ஊழியர்களின் உயரங்கள் இடை 160 cm உடனும் நியம விலகல் 5 cm உடனும் செவ்வனாகப் பரம்பியுள்ளன.

(i) ஓர் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படும் ஊழியரின் உயரம் 165 cm இலும் கூடியதாகவும் 170 cm இலும் குறைந்ததாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) ஓர் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படும் ஊழியரின் உயரம் 165 cm இலும் கூடியதெனத் தரப்படும் போது அவருடைய உயரம் 170 cm இலும் கூடியதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

Sri Lanka

Department of Examinations - Sri Lanka