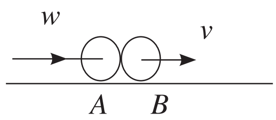
1. එක එකක ස්කන්ධය m වූ A, B හා C අංශු තුනක් එම පිළිවෙළින්, සුමට තිරස් මේසයක් මත සරල රේඛාවක තබා ඇත. A අංශුවට u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන්නේ එය B අංශුව සමග සරල ලෙස ගැටෙන පරිදි ය. A අංශුව සමග ගැටුන පසු, B අංශුව චලනය වී C අංශුව සමග සරල ලෙස ගැටේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. පළමු ගැටුමෙන් පසුව B හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

B හා C අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය ද e වේ. B සමග ගැටුමෙන් පසුව C හි ප්‍රවේගය ලියා දක්වන්න.

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

A හා B සඳහා (පළමු ගැටුමට) $\rightarrow$:

$$0 = mv + mw - mu \quad 5$$

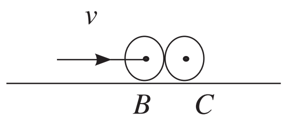


$$\Rightarrow v + w = u \text{ ——— (i)}$$

නිව්ටන් ප්‍රත්‍යාගති නියමය :

$$v - w = eu \text{ ——— (ii)} \quad 5$$

$$\therefore \text{(i)} + \text{(ii)} \Rightarrow v = \frac{(1+e)}{2}u \quad 5$$



$\therefore$ පළමු ගැටුමට පසුව B හි ප්‍රවේගය $= \dfrac{1}{2}(1+e)\,u.$

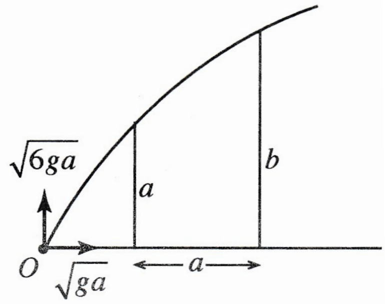
v මගින් u ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්, B සමග ගැටුමට පසුව C හි ප්‍රවේගය $= \dfrac{1}{2}(1+e)\,v$ 5

$$= \frac{1}{4}(1+e)^2 u \quad 5$$

25

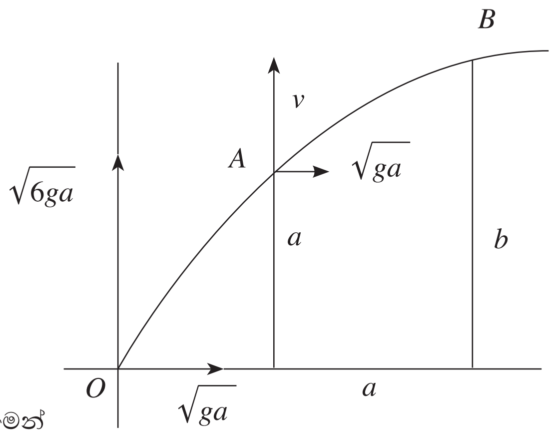
2. තිරස් හා සිරස් සංරචක පිළිවෙළින් $\sqrt{ga}$ හා $\sqrt{6ga}$ සහිත ප්‍රවේගයකින් තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, එකිනෙකට a තිරස් දුරකින් පිහිටි උස a හා b වූ සිරස් තාප්ප දෙකකට යාන්තමින් ඉහළින් අංශුව යයි. උස a වූ තාප්පය පසු කරන විට අංශුවේ ප්‍රවේගයෙහි සිරස් සංරචකය $2\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න.

$b = \dfrac{5a}{2}$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.



අංශුව, උස a වූ තාප්පය පසුකර යනවිට, එහි සිරස් ප්‍රවේග සංරචකය v යැයි සිතමු.

O සිට A දක්වා, $\uparrow$ $v^2 = u^2 + 2as$:



$v^2 = 6ga - 2g \,.\, a = 4ga$ 5

$\therefore v = 2\sqrt{ga}$ 5

අමතර T කාලයකට පසුව එය දෙවන බිත්තිය පසුකර යයි නම්,

A සිට B දක්වා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ $\rightarrow$ හා $\uparrow$, යෙදීමෙන්

$a = \sqrt{ga} \,.\, T,$ 5

හා $b - a = 2\sqrt{ga} \,.\, T - \frac{1}{2}gT^2$ 5

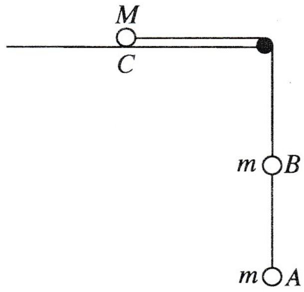
T ඉවත් කිරීමෙන්, $b - a = 2\sqrt{ga} \,.\, \sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{1}{2}g.\,\frac{a}{g}$

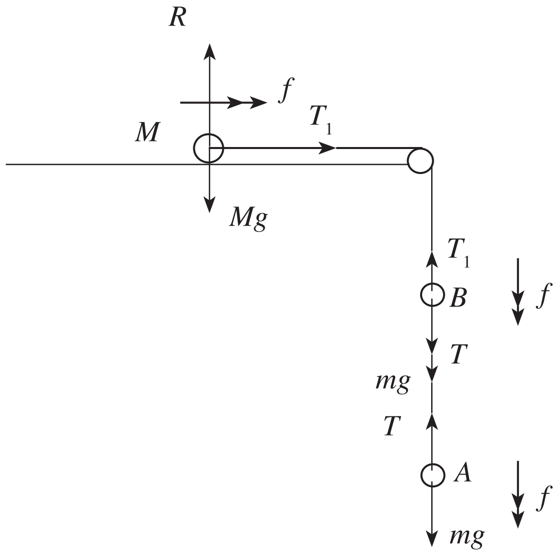
$\therefore b = a + 2a - \frac{a}{2}$

එනම්, $b = \frac{5a}{2}$ 5

25

3. රූපයෙහි A, B හා C යනු ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m, m හා M වූ අංශු වේ. A හා B අංශු සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. සුමට තිරස් මේසයක් මත වූ C අංශුව, මේසයේ දාරයට සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පියක් මතින් යන තවත් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් B ට ඇඳා ඇත. අංශු හා තන්තු සියල්ලම එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. තන්තු නොබුරුල්ව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. A හා B යා කරන තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.





$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

A සඳහා $\downarrow$ $mg - T = mf$ 5

B සඳහා $\downarrow$ $T + mg - T_1 = mf,$ 5

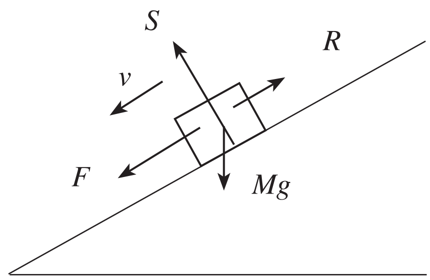
C සඳහා $\rightarrow$ $T_1 = Mf$ 5

බල 5

ත්වරණ 5

25

4. ස්කන්ධය M kg හා P kW නියත ජවයකින් යුත් කාරයක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ පහළට චලනය වේ. එහි චලිතයට $R\,(> Mg\sin\alpha)$ N නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. එක්තරා මොහොතක දී කාරයේ ත්වරණය a ms^{-2} වේ. මෙම මොහොතේ දී කාරයේ ප්‍රවේගය සොයන්න.
මාර්ගය දිගේ පහළට කාරයට චලනය විය හැකි නියත වේගය $\dfrac{1000P}{R - Mg\sin\alpha}$ ms^{-1} බව **අපෝහනය** කරන්න.



කාරයෙහි වේගය $v\ ms^{-1}$ වන විට,

ප්‍රකර්ෂණ බලය $F = \dfrac{1000\,P}{v}$ 5

ත්වරණය $a\ ms^{-2}$ වන මොහොතේ දී,

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$\swarrow$ $F + Mg\sin\alpha - R = Ma.$ 10

$$\Rightarrow \frac{1000\,P}{v} + Mg\sin\alpha - R = Ma$$

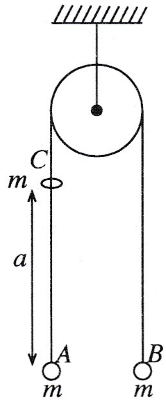
$$\therefore \quad v = \frac{1000\,P}{R - Mg\sin\alpha + Ma}$$ 5

කාරය නියත වේගයෙන් චලනය වන විට $a = 0$ වන අතර නියත වේගයේ අගය

$$v = \frac{1000\,P}{R - Mg\sin\alpha}\,.$$ 5

25

5. එක එකක ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක්, අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. A ට සිරස්ව a දුරක් ඉහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයකින් නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරින ලද ස්කන්ධය m ම වූ C කුඩා පබළුවක් ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය වී A සමග ගැටී හා වේ. (රූපය බලන්න.) A හා C අතර ගැටුම සිදු වන මොහොතේ දී තන්තුවේ ආවේගය ද ඉහත ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු B ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය ද නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

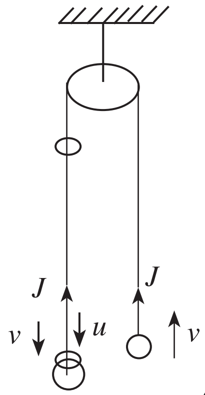


$v^2 = u^2 + 2as \downarrow$ යෙදීමෙන්,

a දුරක් වැටීමේදී C ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය $u = \sqrt{2ga}$ 5

C හා A ගැටෙන මොහොතේදී තන්තුවේ ආවේගය J යැයිද,

ගැටුමට මොහොතකට පසුව B හි ප්‍රවේගය v යැයිද ගනිමු.



5 v සඳහා

එවිට, $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

B සඳහා $\uparrow$ $J = mv.$ 5

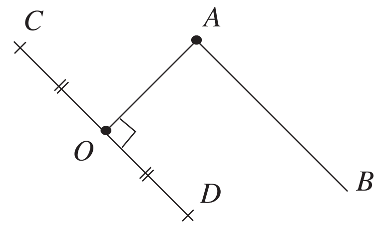
A හා C සඳහා $\downarrow$ $-J = (m+m)v - mu.$ 10

එනම් $-J = 2mv - m\sqrt{2ga}$.

25

6. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ හා $3\mathbf{i}-\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. $A\hat{O}C = A\hat{O}D = \frac{\pi}{2}$ හා $OC = OD = \frac{1}{3}AB$ වන පරිදි වූ C හා D ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහි පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

සටහන :



$\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -(2\mathbf{i}+\mathbf{j}) + (3\mathbf{i}-\mathbf{j})$

$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 5

$\therefore AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{OC} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i}$ යැයි ගනිමු.

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ නිසා, $(2\mathbf{j}+\mathbf{j}) \cdot (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) = 0$

$\therefore y = -2x$ 5

$OC = \frac{1}{3}AB$ නිසා, $\sqrt{x^2+4x^2} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ 5

$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{9}.$

මෙම සමීකරණ D හි ඛණ්ඩාංක සඳහා ද වලංගු වේ.

එම නිසා, $x = \pm\frac{1}{3}.$

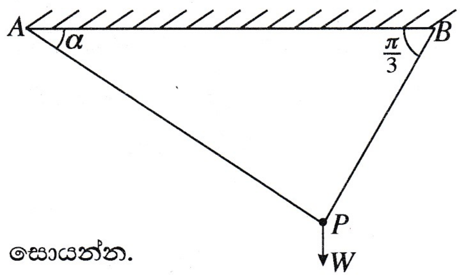
$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} \\ y &= -\frac{2}{3} \end{aligned}\right\}$ 5 $\quad \left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{3} \\ y &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right\}$ 5

එම නිසා, C හා D හි පිහිටුම් දෛශික වන්නේ, $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$ හා $-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$ වේ.

$\boxed{25}$

7. තිරස සමග පිළිවෙළින් α හා $\dfrac{\pi}{3}$ කෝණ සාදන AP හා BP සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් තිරස් සිවිලිමකින් එල්ලා ඇති බර W වූ P අංශුවක්, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සමතුලිතතාවයේ පවතී. AP තන්තුවේ ආතතිය, W හා α ඇසුරෙන් සොයන්න.

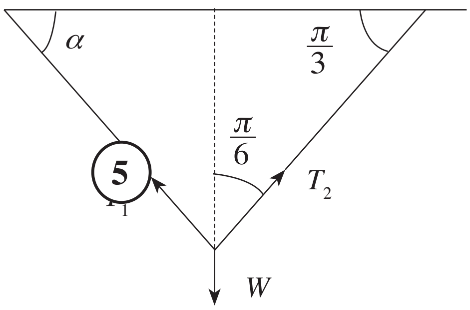
ඒ නයින්, මෙම ආතතියේ අවම අගයත් එයට අනුරූප α හි අගයත් සොයන්න.



ලාමී ප්‍රමේයයෙන්,

$$\frac{T_1}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{6}\right)} \cdot \quad 10$$

$$\therefore \; T_1 = \frac{W}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} \cdot \quad 5$$

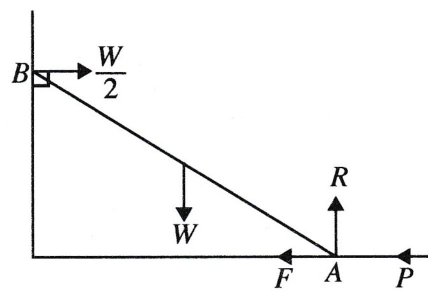


එම නිසා AP හි T_1 ආතතියේ අවම අගය $= \dfrac{W}{2}$ වන අතර, T_1 හි අවමයට අනුරූප α හි අගය $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ වේ.

5

25

8. දිග $2a$ හා බර W වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් එහි A කෙළවර රළු තිරස් ගෙබිමක් මත ද B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද තබා ඇත. බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක දණ්ඩ සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ A කෙළවරේ දී බිත්තිය දෙසට යෙදූ විශාලත්වය P වන තිරස් බලයක් මගිනි. රූපයේ F හා R මගින් පිළිවෙළින් A හි දී සර්ෂණ බලය හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව දක්වා ඇත. B හි දී බිත්තිය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව, රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි $\frac{W}{2}$ ද දණ්ඩ හා ගෙබිම අතර සර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{4}$ ද නම්, $\frac{W}{4} \le P \le \frac{3W}{4}$ බව පෙන්වන්න.



දණ්ඩේ සමතුලිතතාව සඳහා

විභේදනයෙන් $\uparrow$ $R - W = 0.$ (5)

$\leftarrow$ $P + F - \frac{W}{2} = 0.$ (5)

$\therefore F = \frac{W}{2} - P$ (5)

$\because |F| \le \mu R$

(5)

$\left|\frac{W}{2} - P\right| \le \frac{1}{4} W$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} W \le \frac{W}{2} - P \le \frac{1}{4} W$

$\Rightarrow \frac{W}{4} \le P \le \frac{3W}{4}$ (5)

$\boxed{25}$

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ හා $P(A'\cap B)=\frac{1}{10}$ බව දී ඇත. $P(B)$ හා $P(A'\cap B')$ සොයන්න; මෙහි A' හා B' වලින් පිළිවෙළින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි දැක්වේ.

$$P(B) = P\big((A\cap B)\cup(A'\cap B)\big) = P(A\cap B)+P(A'\cap B) \quad 5$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{10}.$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{2}. \quad 5$$

$$P(A'\cap B') = P\big((A\cup B)'\big)$$

$$= 1 - P(A\cup B) \quad 5$$

$$= 1 - [\,P(A)+P(B)-P(A\cap B)\,] \quad 5$$

$$= 1 - [\tfrac{3}{5}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{5}]$$

$$= 1 - \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A'\cap B') = \frac{3}{10} \quad 5$$

25

10. එක එකක් 5 ට අඩු ධන නිඛිල පහකට මාතයන් දෙකක් ඇති අතර ඉන් එකක් 3 වේ. ඒවායේ මධ්‍යනාය්‍ය හා මධ්‍යස්ථය යන දෙකම 3 ට සමාන වේ. මෙම නිඛිල පහ සොයන්න.

මධ්‍යස්ථය $= 3$ හා ප්‍රභින්න මාත දෙකක් සහිතව පහට අඩු සංඛ්‍යා පහක්, ආරෝහණ පිළිවෙළට සකස් කළ විට පහත දැක්වෙන ආකාර දෙකකි.

$a, a, 3, 3, 4$ 5

$b, 3, 3, 4, 4$ 5

මධ්‍යනාය්‍ය 3 බැවින් ඒවායේ ඓක්‍යය 15 වේ.

එවිට $2a + 10 = 15$; $a = \frac{5}{2}$, # 5

හෝ $b + 14 = 15$; $b = 1.$ 5

$\therefore$ සංඛ්‍යා පහ වන්නේ 1, 3, 3, 4, 4 5

$\boxed{25}$

11. (*a*) P හා Q මෝටර් රථ දෙකක් සෘජු පාරක් දිගේ නියත ත්වරණ සහිතව එකම දිශාවකට චලනය වේ. කාලය $t = 0$ හි දී P හි ප්‍රවේගය $u\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ද Q හි ප්‍රවේගය $(u+9)\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ද වේ. P හි නියත ත්වරණය $f\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ද Q හි නියත ත්වරණය $\left(f+\frac{1}{10}\right)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ද වේ.

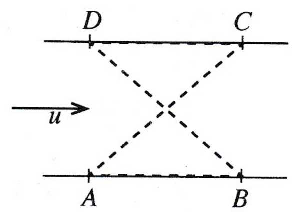
(i) $t \geq 0$ සඳහා P හා Q හි චලිතවලට, එකම රූපයක හා

(ii) $t \geq 0$ සඳහා P ට සාපේක්ෂව Q හි චලිතයට, වෙනම රූපයක,

ප්‍රවේග-කාල වක්‍රවල දළ සටහන් අඳින්න.

කාලය $t = 0$ හි දී P මෝටර් රථය Q මෝටර් රථයට වඩා මීටර 200 ක් ඉදිරියෙන් සිටි බව තවදුරටත් දී ඇත. P පසුකර යෑමට Q මගින් ගනු ලබන කාලය සොයන්න.

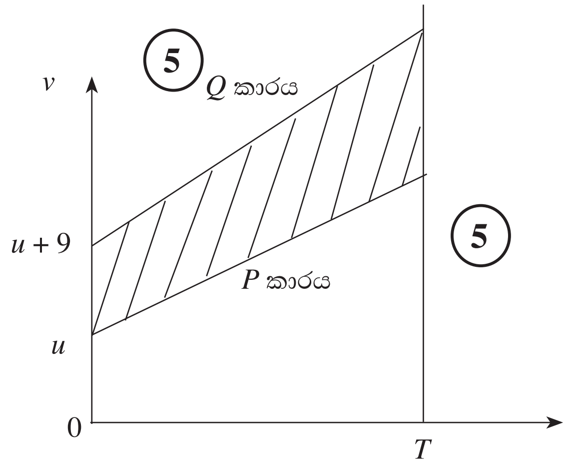
(*b*) සමාන්තර සෘජු ඉවුරු සහිත පළල a වූ ගඟක් u ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ගලයි. රූපයෙහි, A, B, C හා D යන ඉවුරු මත වූ ලක්ෂ්‍ය සමචතුරස්‍රයක ශීර්ෂ වේ. ජලයට සාපේක්ෂව නියත $v(>u)$ වේගයෙන් චලනය වන B_1 හා B_2 බෝට්ටු දෙකක් එකම මොහොතක A සිට ඒවායේ ගමන් ආරම්භ කරයි. B_1 බෝට්ටුව පළමුව $\overrightarrow{AC}$ දිගේ C වෙත ගොස් ඉන්පසු $\overrightarrow{CD}$ දිශාවට ගඟ දිගේ ඉහළට D වෙත යයි. B_2 බෝට්ටුව පළමුව $\overrightarrow{AB}$ දිශාවට ගඟ දිගේ පහළට B වෙත ගොස් ඉන්පසු $\overrightarrow{BD}$ දිගේ D වෙත යයි. එකම රූපයක, B_1 හි A සිට C දක්වා ද B_2 හි B සිට D දක්වා ද චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අඳින්න.



ඒ නයින්, A සිට C දක්වා චලිතයේ දී B_1 බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2-u^2}+u\right)$ බව පෙන්වා B සිට D දක්වා චලිතයේ දී B_2 බෝට්ටුවේ වේගය සොයන්න.

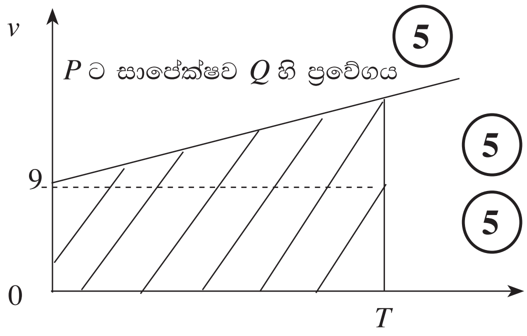
B_1 හා B_2 බෝට්ටු දෙකම එකම මොහොතක දී D වෙත ළඟා වන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(*a*)



5

10



5 $\underline{v}(Q, P) = (u+9) - u = 9.$

5 $\underline{a}\,(Q, P) = (f + \frac{1}{10}) - f = \frac{1}{10}\,.$

15

$t = 0$ වේලාවේ දී, P කාරයට 200m ඉදිරියෙන් Q ඇත.

අඳුරු කළ කොටසෙහි වර්ගඵලය (ප්‍රස්තාර දෙකෙන් ඕනෑම එකක) $= 200.$ 5

P පසුකර යෑමට ගන්නා කාලය T යැයි ගනිමු.

$\therefore \ \frac{1}{2}T\ (9+9+\frac{1}{10}\ T) = 200$ 5

5

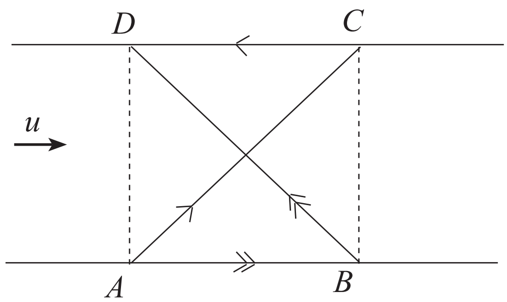
$\Rightarrow \quad T^2 + 180\,T - 4000 = 0$ 5

$\Rightarrow \quad (T-20)(T+200) = 0$

$T > 0$ බැවින්, $T = 20.$ 5

25

(*b*)



සටහන

$\mathbf{V}(B_1, E) = \nearrow \frac{\pi}{4}$, 5 $\quad \mathbf{V}(B_2, E) = \frac{\pi}{4} \nwarrow$ 5

$\mathbf{V}(W, E) = \rightarrow u,$ 5

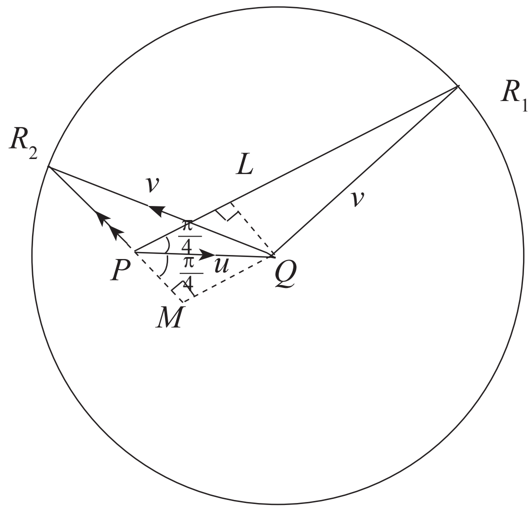
$\mathbf{V}(B_i, W) = v,$ for $i = 1, 2.$

$\mathbf{V}(B_i, E) = \mathbf{V}(B_i, W) + \mathbf{V}(W, E)$ 10

$= \mathbf{V}(W, E) + \mathbf{V}(B_i, W)$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i} \quad i = 1, 2$

$= \overrightarrow{PR_i}\ , \quad i = 1, 2$



15 + 15

55

PQR_1 ත්‍රිකෝණයේ,

$PR_1 = PL + LR_1$

$= \frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{v^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2v^2 - u^2} + u\right]$ 10

A සිට C දක්වා B_1 හි වේගය $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2 - u^2} + u\right)$

PQR_2 ත්‍රිකෝණයේ,

$$PR_2 = MR_2 - MP = \sqrt{v^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2 - u^2} - u\right) \quad 10$$

$\boxed{20}$

A සිට C දක්වා $\overrightarrow{AC}$ දිගේ චලනය වීමට හා ඊළඟට C සිට D දක්වා $\overrightarrow{CD}$ දිගේ චලනය වීමට B_1 ගන්නා කාලය වන්නේ

$$T_1 = \frac{a\sqrt{2}}{PR_1} + \frac{a}{v-u} . \quad 5$$

A සිට B දක්වා $\overrightarrow{AB}$ දිගේ චලනය වීමට හා ඊළඟට B සිට D දක්වා $\overrightarrow{BD}$ දිගේ චලනය වීමට B_2 ගන්නා කාලය වන්නේ

$$T_2 = \frac{a}{v+u} + \frac{a\sqrt{2}}{PR_2} \quad 5$$

$$T_2 - T_1 = a\sqrt{2}\left(\frac{1}{PR_2} - \frac{1}{PR_1}\right) - a\left(\frac{1}{v-u} - \frac{1}{v+u}\right) \quad 5$$

$$= a\sqrt{2}\left(\frac{PR_1 - PR_2}{PR_1 . PR_2}\right) - \frac{2au}{v^2 - u^2}$$

$$= \frac{a\sqrt{2} . \sqrt{2}\, u}{\frac{1}{2}\left[(2v^2 - u^2) - u^2\right]} - \frac{2au}{v^2 - u^2} \quad 5$$

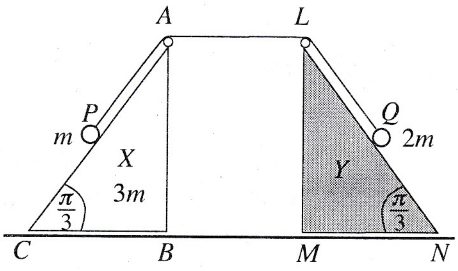
$$= \frac{2au}{v^2 - u^2} - \frac{2au}{v^2 - u^2}$$

$$= 0. \quad 5$$

එම නිසා, B_1 හා B_2 බෝට්ටු දෙකම එකම මොහොතේ D වෙත ළඟා වේ. $\boxed{25}$

---

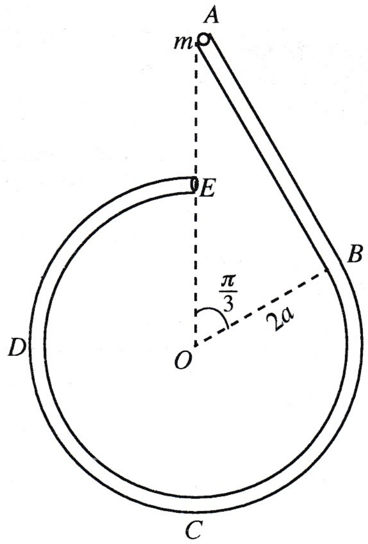
12. (*a*) රූපයෙහි ABC හා LMN ත්‍රිකෝණ, $A\hat{C}B = L\hat{N}M = \dfrac{\pi}{3}$ හා $A\hat{B}C = L\hat{M}N = \dfrac{\pi}{2}$ වූ BC හා MN අඩංගු මුහුණත් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද පිළිවෙළින් X හා Y සර්වසම සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤ දෙකක ගුරුත්ව කේන්ද්‍ර තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. ස්කන්ධය $3m$ වූ X කුඤ්ඤය ගෙබිම මත චලනය වීමට නිදහස් වන අතර Y කුඤ්ඤය **අචලව** තබා ඇත. AC හා LN රේඛා අදාළ මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. A හා L හි සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පි දෙකක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවර ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙකකට ඈඳා ඇත. රූපයේ පරිදි ආරම්භක පිහිටීමේ දී, තන්තුව නොබුරුල්ව හා $AP = AL = LQ = a$ වන ලෙස P හා Q අංශු පිළිවෙළින් AC හා LN මත අල්වා තබා ඇත. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Y වෙත යාමට X ගනු ලබන කාලය, a හා g ඇසුරෙන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.



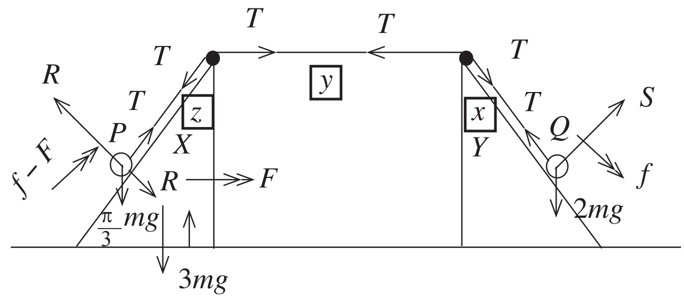
(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි සුමට සිහින් $ABCDE$ බටයක් සිරස් තලයක සවිකර ඇත. දිග $2\sqrt{3}a$ වූ AB කොටස ඍජු වන අතර එය B හි දී අරය $2a$ වූ $BCDE$ වෘත්තාකාර කොටසට ස්පර්ශක වේ. A හා E අන්ත O කේන්ද්‍රයට සිරස්ව ඉහළින් පිහිටයි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් A හි දී බටය තුළ තබා නිශ්චලතාවයේ සිට සීරුවෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. $\overrightarrow{OA}$ සමග $\theta\left(\dfrac{\pi}{3} < \theta < 2\pi\right)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට P අංශුවේ වේගය, v යන්න, $v^2 = 4ga(2-\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, එම මොහොතේ දී P අංශුව මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

P අංශුව A සිට B දක්වා චලිතයේ දී එය මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.

P අංශුව B පසු කරන විට P අංශුව මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව ක්ෂණිකව වෙනස් වන බව පෙන්වන්න.



(*a*)



බල **15**

ත්වරණ **20**

Acc of (X, E)	=	$\twoheadrightarrow F$	$x + y + z$ නියතයකි.
Acc of (Q, E)	=	f ($\frac{\pi}{3}$), ($\because$ Y අචල නිසා)	$\Rightarrow \ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} = 0$
Acc of (P, X)	=	$f - F$	$\Rightarrow -\ddot{z} = \ddot{x} - (-\ddot{y})$
$\therefore$ Acc of (P, E)	=	$\twoheadrightarrow F + f - F$ ($\frac{\pi}{3}$)	$= f - F$

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්

P අංශුවට X හි චලිතය සඳහා ;

$\rightarrow T \quad = 3mF + m\left(F + \dfrac{f-F}{2}\right)$ **15**

P හි චලිතය සඳහා ;

$$\frac{\pi}{3} \quad T - mg\frac{\sqrt{3}}{2} = m\left(f - F + \frac{F}{2}\right) \quad 10$$

Q හි චලිතය සඳහා ;

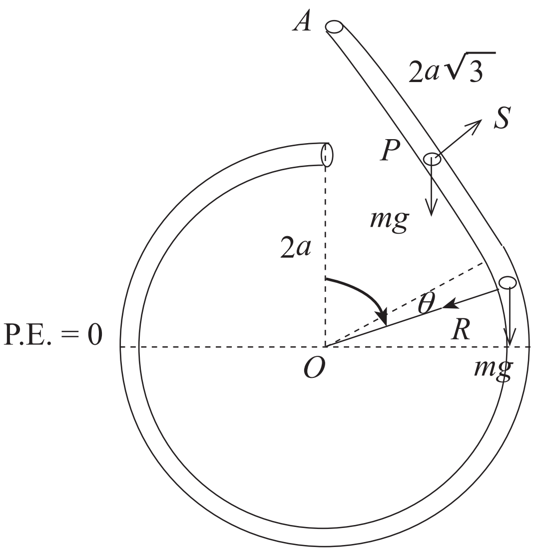
$$\frac{\pi}{3} \quad 2\,mg\frac{\sqrt{3}}{2} - T = 2mft \quad 10$$

X ට Y වෙත ළඟා වීමට ගත වන කාලය t :

$$a = \frac{1}{2}Ft^2 \quad 10 \qquad \left(s = ut + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \text{for } X\right)$$

80

(*b*)



5

5

P අංශුවට ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\,(2a\cos\theta) = 0 + mg.\,4a \quad 15$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 4ga\,(2 - \cos\theta),\ \frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi \quad 5$$

නළය ඇතුළත වෘත්ත චලිතය සඳහා **F** = m**a** ↙ :

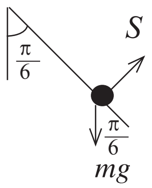
$$mg\cos\theta + R = \frac{mv^2}{2a} = 2mg\,(2 - \cos\theta) \quad 10 + 5$$

$$\Rightarrow \quad R = mg\,(4 - 3\cos\theta) > 0 \quad \text{—— (i)} \quad 5$$

$\therefore$ මෙම ප්‍රතික්‍රියාව O කේන්ද්‍රය වෙතට වේ.

50

සෘජු නළය ඇතුළත චලිතය සඳහා $\mathbf{F} = \mathrm{m}a \nearrow$:



$$S - mg\cos\frac{\pi}{3} = m\,(0)$$

$$S = \frac{mg}{2} \quad 5$$

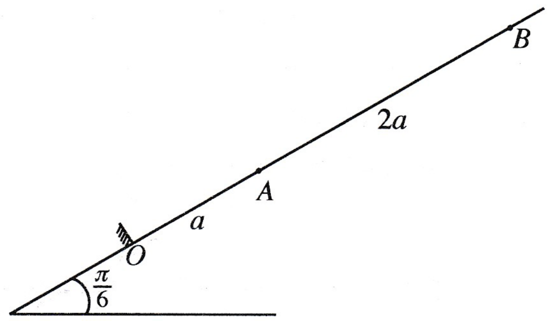
B වෙත ළඟා වීමට මොහොතකට පෙර ප්‍රතික්‍රියාව $= \frac{mg}{2} \nearrow$ 5

B වෙත පසු කර මොහොතකට පසු ප්‍රතික්‍රියාව $= \frac{5}{2}\,mg \swarrow$ 5

ඒ අනුව, B හිදී ප්‍රතික්‍රියාව විශාලත්වයෙන් $\frac{mg}{2}$ සිට $\frac{5}{2}mg$ දක්වා වෙනස් වන අතර දිශාව පිටත සිට ඇතුළතට වෙනස් වේ. 5

$\boxed{20}$

13. තිරසට $\frac{\pi}{6}$ කෝණයකින් ආනත සුමට අචල තලයක උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් මත $OA = a$ හා $AB = 2a$ වන පරිදි O පහළම ලක්ෂ්‍යය ලෙස ඇතිව O, A හා B ලක්ෂ්‍ය එම පිළිවෙළින් පිහිටා ඇත. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O ලක්ෂ්‍යයට ඇඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ඇඳා ඇත. P අංශුව B ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟා වන තෙක් තන්තුව OAB රේඛාව දිගේ අදිනු ලැබේ. ඉන්පසු P අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. B සිට A දක්වා P හි චලිත සමීකරණය, $0 \le x \le 2a$ සඳහා, $\ddot{x} + \frac{g}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $AP = x$ වේ.



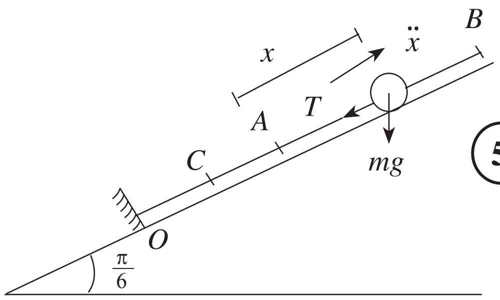
$y = x + \frac{a}{2}$ යැයි ගෙන ඉහත චලිත සමීකරණය $\frac{a}{2} \le y \le \frac{5a}{2}$ සඳහා $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ ආකාරයෙන් නැවත ලියන්න; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ වේ.

ඉහත සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය සොයා $\dot{y}^2 = \omega^2 (c^2 - y^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, c විස්තාරය හා A වෙත ළඟා වන විට P හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

O වෙත ළඟා වන විට P හි ප්‍රවේගය $\sqrt{7ga}$ බව පෙන්වන්න.

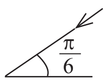
B සිට O දක්වා චලනය වීමට P මගින් ගනු ලබන කාලය $\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\right\}$ බවත් පෙන්වන්න; මෙහි $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ වේ.

P අංශුව O වෙත ළඟා වන විට, තලයට ලම්බව O හි සවිකර ඇති සුමට බාධකයක් හා එය ගැටෙයි. බාධකය හා P අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. $0 < e \le \frac{1}{\sqrt{7}}$ නම්, පසුව සිදු වන P හි චලිතය සරල අනුවර්තී **නොවන** බව පෙන්වන්න.



5

P හි චලිතය සඳහා : $\underline{F} = m\underline{a}$ ↙



$$T + mg\frac{1}{2} = m(-\ddot{x}) \text{ — (i)}$$ 10

$$T = mg\left(\frac{x}{a}\right) \text{ — (ii)}$$ 5

(i) හා (ii) න් $\Rightarrow$ $\ddot{x} + \frac{g}{a}\left(x + \frac{g}{2}\right) = 0, \quad 0 \le x \le 2a.$

5

25

$y = x + \frac{a}{2}$ ලිවීමෙන් $\ddot{y} = \ddot{x}$ ලැබේ. 5

$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \ \frac{a}{2} \leq y \leq \frac{5a}{2}$, 5

මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{a}$ වේ. **10**

සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය C, $\ddot{x} = 0$ එනම් $y = 0$ හෝ $x = \frac{-a}{2}$. 5 + 5

මේ අනුව C ලක්ෂ්‍යය, OA මත $OC = \frac{a}{2}$ වන පරිදි වේ. (OA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.)

c විස්තාරය, දෙනු ලබන සූත්‍රය $\dot{y}^2 = \omega^2(c^2 - y^2)$

මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{a}$ වේ.

B හිදී, $y = \frac{5a}{2}$ වන විට $\dot{y} = 0$. 5

$\therefore 0 = \omega^2\left(c^2 - \left(\frac{5a}{2}\right)^2\right) \Rightarrow c = \frac{5a}{2}$. 5

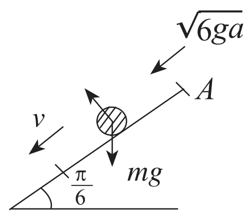
අංශුව, A ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය u යැයි ගනිමු.

A හිදී $y = \frac{a}{2}$, $u^2 = \frac{g}{a}\left(\left(\frac{5a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$. 5 + 5

$\Rightarrow u = \sqrt{6ga}$. 5 **35**

<u>A සිට O දක්වා P හි චලිතය</u>

මෙම චලිතය තලය මත ගුරුත්වය යටතේ වේ.



$v^2 = u^2 + 2fs$ යෙදීමෙන්

$\swarrow \ v^2 = 6ga + 2\left(\frac{g}{2}\right).a$ 5

$\therefore v^2 = 7ga$

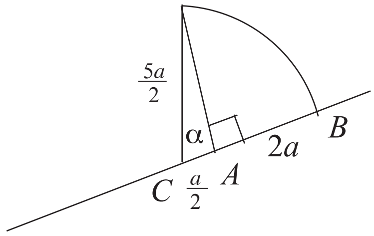
$\therefore v = \sqrt{7ga}$ 5 **10**

සරල අනුවර්තී චලිතය යටතේ B සිට A දක්වා P ගන්නා t_1 කාලය,

$\omega t_1 = \alpha.$ 5 දැන් $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{5a}{2}} = \dfrac{1}{5}$. 5

$\therefore t_1 = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\tfrac{1}{5}\right)\right).$ 5

ඊළඟට, A සිට O දක්වා චලිතයට P ගන්නා t_2 කාලය,



$v = u + at$ යෙදීමෙන් 5

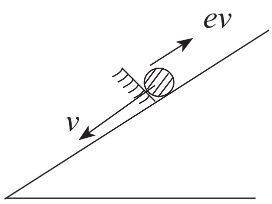
$\swarrow \quad \sqrt{7ga} = \sqrt{6ga} + \dfrac{g}{2} t_2$

$\therefore t_2 = 2\sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\sqrt{7} - \sqrt{6}\right)$ 5 $= 2k\sqrt{\dfrac{a}{g}}$, මෙහි $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

$\therefore$ B සිට O දක්වා ගතවන කාලය 5

$t_1 + t_2 = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\tfrac{1}{5}\right) + 2k\right)$, මෙහි $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

35



O හි සුමට බාධකය සමග ගැටීමට මොහොතකට පසුව P හි වේගය $ev = e\sqrt{7ga}$ 5 $\frac{\pi}{6}$

$0 < z \le a$ වේ නම් අංශුවේ පසුව එන චලිතය සරල අනුවර්තී නොවේ; මෙහි z යනු ගුරුත්වය යටතේ, තලයේ ඉහළට චලනය වන දුර වේ. 10

$v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්, 5

$\nearrow \quad 0 = (ev)^2 - 2\left(\dfrac{g}{2}\right)z$

$\Rightarrow \quad z = 7e^2a$ 5

දැන්, $0 < z \le a$

$\Leftrightarrow \quad 0 < 7e^2a \le a$ 5

$\Leftrightarrow \quad 0 < e \le \dfrac{1}{\sqrt{7}}.$ 5

35

---

14. (*a*) $OACB$ යනු සමාන්තරාස්‍රයක් යැයි ද D යනු AC මත $AD : DC = 2 : 1$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. O අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\lambda\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ; මෙහි $\lambda > 0$ වේ. $\overrightarrow{OC}$ හා $\overrightarrow{BD}$ දෛශික, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා λ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

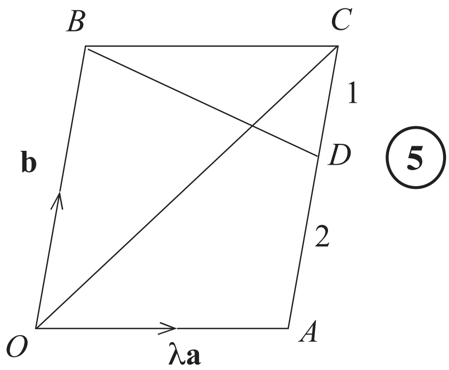
දැන්, $\overrightarrow{OC}$ යන්න $\overrightarrow{BD}$ ට ලම්බ වේ යැයි ගනිමු. $3|\mathbf{a}|^2\lambda^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ බව පෙන්වා $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ හා $A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{3}$ නම්, λ හි අගය සොයන්න.

(*b*) කේන්ද්‍රය O හා පැත්තක දිග $2a$ වූ $ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රයක තලයෙහි වූ බල තුනකින් පද්ධතියක් සමන්විත වේ. මූලය O හි ද Ox-අක්ෂය $\overrightarrow{OB}$ දිගේ ද Oy-අක්ෂය $\overrightarrow{OH}$ දිගේ ද ඇතිව බල හා ඒවායේ ක්‍රියා ලක්ෂ්‍ය, සුපුරුදු අංකනයෙන්, පහත වගුවේ දක්වා ඇත; මෙහි H යනු CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.
(P නිව්ටන වලින් ද a මීටර වලින් ද මනිනු ලැබේ.)

ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යය	පිහිටුම් දෛශිකය	බලය
A	$a\mathbf{i} - \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
C	$a\mathbf{i} + \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$-3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
E	$-2a\mathbf{i}$	$-2\sqrt{3}P\mathbf{j}$

පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා, යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයන්න.
දැන්, $\overrightarrow{FE}$ දිගේ ක්‍රියා කරන විශාලත්වය $6P$ N වූ අතිරේක බලයක් මෙම පද්ධතියට ඇතුළත් කරනු ලැබේ. නව පද්ධතිය ඌනනය වන තනි බලයේ විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

(*a*)



$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OC} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 5

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= \lambda\mathbf{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ 5

$\overrightarrow{BD} = \lambda\mathbf{a} + -\frac{1}{3}\mathbf{b}$

5

$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BD}$ ට බැවින් ඒවායේ අදිශ ගුණිතව $= 0$. 5

$\Rightarrow (\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}) \,.\, (\lambda\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}) = 0$

$\lambda^2|\mathbf{a}|^2 + (1 - \frac{1}{3})(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\lambda - \frac{1}{3}|\mathbf{b}|^2 = 0$ 5 $(\because \mathbf{b}\,.\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})$

$\Rightarrow 3\lambda^2|\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ 5

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ හා $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\frac{\pi}{3}$ 5

$= \frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2$

ඉහත සමීකරණයෙහි ආදේශයෙන්,

$3|\mathbf{a}|^2\lambda^2 + 2\,.\,\frac{1}{2}\,|\mathbf{a}|^2\lambda - |\mathbf{a}|^2 = 0$ 5

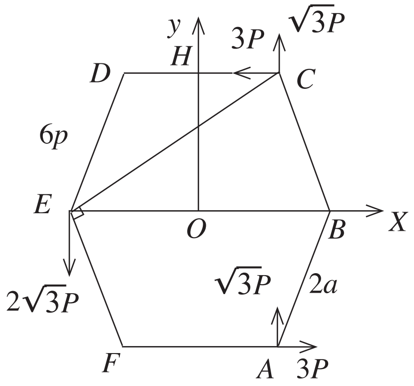
$3\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ 5

$\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$

$\lambda > 0$ බැවින් $\lambda = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$. 5

$\boxed{50}$

(*b*)



ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික වන්නේ,

$\overrightarrow{OA} = a\mathbf{i} - \sqrt{3}\,a\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OC} = a\mathbf{i} + \sqrt{3}\,a\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OE} = -2a\mathbf{i}$

රූපය සඳහා 15

O හි දී පද්ධතිය ඌනනය කරමු.

$\rightarrow\ X = 3P - 3P = 0$ 10

$\uparrow\ Y = \sqrt{3}P + \sqrt{3}P - 2\sqrt{3}P = 0$

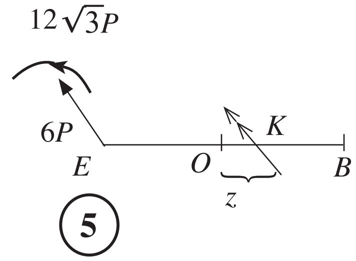
} $M \neq 0$ වේ නම් පද්ධතිව යුග්මයකට තුල්‍ය වේ. 10

$O \circlearrowleft\ 2 \times 3P\,.\,a\sqrt{3}P + 2a\sqrt{3}P + (2a)\,.\,2\sqrt{3}P = M = 12a\sqrt{3}P \circlearrowleft$ 20

යුග්මයේ ඝූර්ණය $(M \neq 0)$ හි විශාලත්වය $12a\sqrt{3}P$ Nm වන අතර එය වාමාවර්ත වේ. 5 + 5

$\boxed{65}$

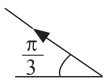
නව පද්ධතිය



5

විශාලත්වය $= 6P$ 5

දිශාව $=$



5

$K \circlearrowleft\quad -6P \times (2a+z)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 12a\sqrt{3}P = 0$ 10

$\Rightarrow z = 2a$ 5

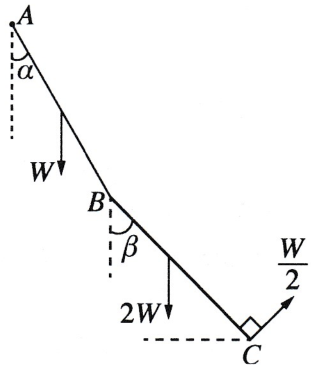
$\therefore$ නව පද්ධතිය $\overrightarrow{BC}$ දිගේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට තුල්‍ය වේ. 5

$\boxed{35}$

---

15. (*a*) එක එකක දිග $2a$ වූ AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB දණ්ඩේ බර W ද BC දණ්ඩේ බර $2W$ ද වේ. A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. AB හා BC දඬු යටි අත් සිරස සමග පිළිවෙළින් α හා β කෝණ සාදමින් මෙම පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ, C හි දී රූපයේ පෙන්වා ඇති BC ට ලම්බ දිශාව ඔස්සේ යෙදූ $\frac{W}{2}$ බලයක් මගිනි. $\beta = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වා, B සන්ධියේ දී AB දණ්ඩ මගින් BC දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවෙහි තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න.

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$ බවත් පෙන්වන්න.



(*b*) රූපයෙහි පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල ඒවායේ කෙළවරවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, BD, DC හා AC සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ.

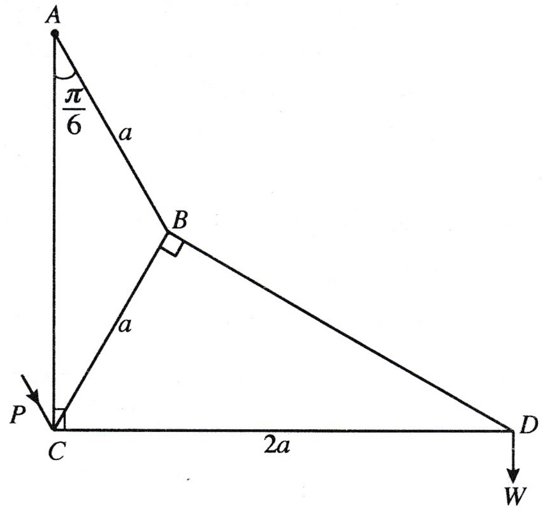
මෙහි $AB = CB = a$ ද $CD = 2a$ ද $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$ ද බව දී ඇත. රාමු සැකිල්ල A හි දී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. D සන්ධියේ දී W භාරයක් එල්ලා, AC සිරස්ව ද CD තිරස්ව ද ඇතිව සිරස් තලයක රාමු සැකිල්ල සමතුලිතව තබා ඇත්තේ C සන්ධියේ දී AB දණ්ඩට සමාන්තරව රූපයේ පෙන්වා ඇති දිශාවට යෙදූ P බලයක් මගිනි. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් D, B හා C සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්,

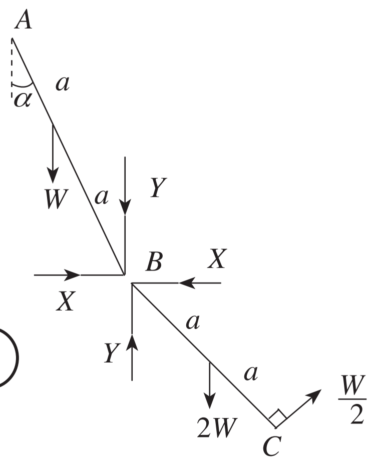
(i) ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් දඬු පහේම ප්‍රත්‍යාබල, හා

(ii) P හි අගය

සොයන්න.



(*a*)



5

BC සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$B \circlearrowright \quad \frac{W}{2}(2a) = 2W.\, a \sin\beta \quad 10$$

$$\Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{1}{2}. \quad \therefore \quad \beta = \frac{\pi}{6}. \quad 5 + 5$$

BC සඳහා

$$\longleftarrow \quad X = \frac{W}{2}\,.\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}\,W. \quad 5$$

$$\uparrow \; BC \text{ සඳහා} : \; Y = 2W - \frac{W}{2}\sin\beta \quad 5$$

$$= \frac{7}{4}\,W. \quad 5$$

$\boxed{40}$

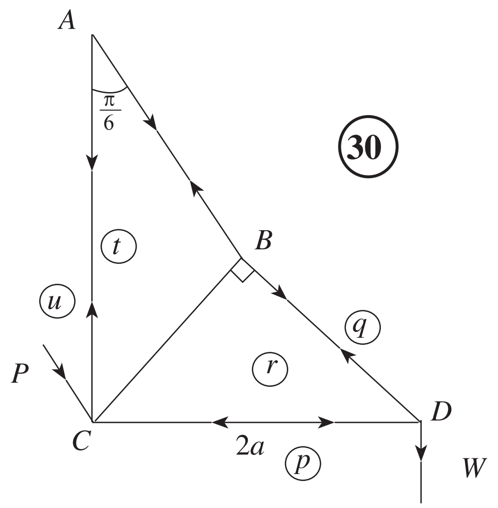
$A \curvearrowleft \quad X\,.\,2a\cos\alpha - Y\,2a\sin\alpha - W\,a\sin\alpha = 0$ 10

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos\alpha = 9\sin\alpha.$ 5

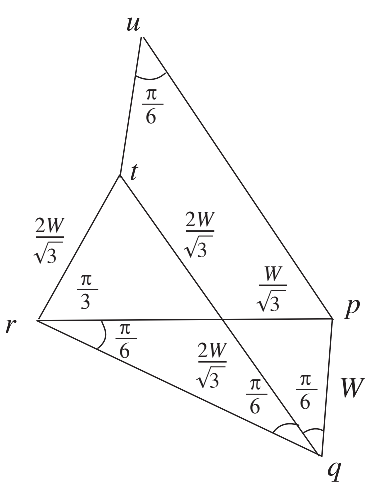
$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9}.$ 5

$\boxed{20}$

(b)



30



දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB	$\dfrac{4W}{\sqrt{3}}$	–
BC	$\dfrac{2W}{\sqrt{3}}$	–
AC	W	–
BD	$2W$	–
CD	–	$\sqrt{3}\,W$

50

$P = up = \dfrac{4W}{\sqrt{3}}$ 10

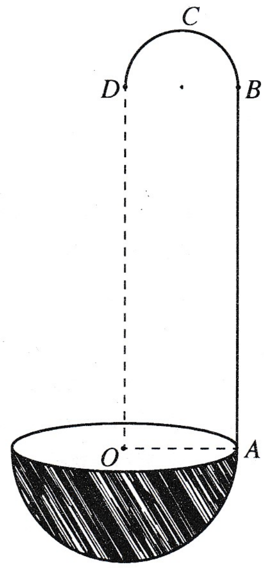
$\boxed{90}$

---

16. (i) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{2a}{\pi}$ දුරකින් ද

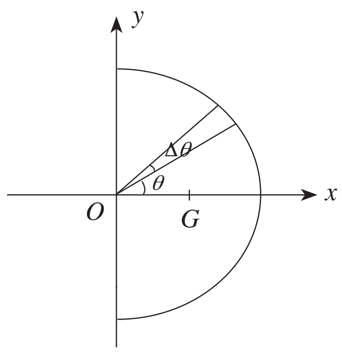
(ii) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොළක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{a}{2}$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.

කේන්ද්‍රය O හා අරය $2a$ වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොළකට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දිග $2\pi a$ වූ AB ඍජු කොටසකින් ද BD විෂ්කම්භය AB ට ලම්බ වන පරිදි, අරය a වූ BCD අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසකින් ද සමන්විත ඒකාකාර කම්බියකින් සාදනු ලැබූ $ABCD$ තුනී මිටක් දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන් හැන්දක් සාදා ඇත. A ලක්ෂ්‍යය අර්ධ ගෝලයේ ගැට්ට මත ඇති අතර OA යන්න AB ට ලම්බ ද OD යන්න AB ට සමාන්තර ද වේ. තව ද BCD යන්න $OABD$ හි තලයේ පිහිටා ඇත. අර්ධ ගෝලයේ ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ ද මිටෙහි ඒකක දිගක ස්කන්ධය $\dfrac{a\sigma}{2}$ ද වේ. හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, OA සිට පහළට $\dfrac{2}{19\pi}\left(8\pi-2\pi^2-1\right)a$ දුරකින් ද O හා D හරහා යන රේඛාවේ සිට $\dfrac{5}{19}a$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රළු තිරස් මේසයක් මත, අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය එය ස්පර්ශ කරමින්, හැන්ද තබා ඇත. අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය හා මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\dfrac{1}{7}$ කි. $\overrightarrow{AO}$ දිශාවට A හි දී යොදනු ලබන තිරස් බලයක් මගින් OD සිරස්ව ඇතිව හැන්ද සමතුලිතතාවයේ තැබිය හැකි බව පෙන්වන්න.

(i)



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, Ox අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$\Delta m = a\Delta\theta\rho$, මෙහි ρ යනු, ඒකක දිගක ස්කන්ධය වේ.

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු. එවිට

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho a\cos\theta \, d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} a\rho \, d\theta} \quad 5 + 5$$

$$= \frac{a\sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}{\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}} \quad 5$$

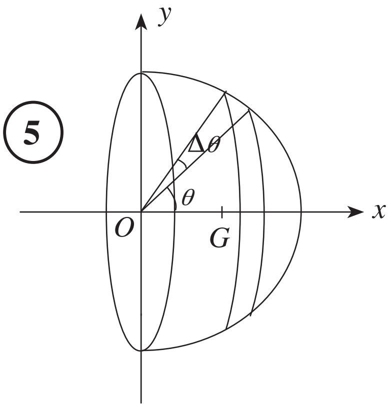
$$= \frac{2a}{\pi} \quad 5$$

ඒ නයින්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\dfrac{2a}{\pi}$ දුරකින් පිහිටයි. **25**

(ii) සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, Ox අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$\Delta m = 2\pi\,(a\,\sin\theta)\,a\rho\theta.\sigma$ මෙහි σ යනු, ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය වේ.

$OG = \bar{x}$. යැයි ගනිමු. එවිට



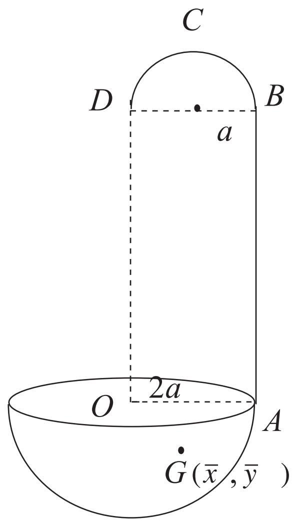
$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(a\sin\theta)\,a\,\sigma a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(a\sin\theta)\,a\,\sigma\,\mathrm{d}\theta} \quad 5 + 5$$

$$= \frac{\left.\frac{a\sin\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left.-\cos\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}} \quad 5 + 5$$

$$= \frac{a}{2}\,. \quad 5$$

ඒ නයින්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{a}{2}$ දුරකින් පිහිටයි.

30



වස්තුව	ස්කන්ධය	OD ($\rightarrow$) සිට දුර	OA ($\downarrow$) සිට දුර	
AB සෘජු කොටස	$\pi a^2 \sigma$ 5	$2a$	πa	5
BCD අර්ධ වෘත්තාකාර කොටස	$\dfrac{\pi a^2 \sigma}{2}$ 5	a	$2\pi a + \dfrac{2a}{\pi}$	5
අර්ධ ගෝලාකාර කබොළ	$8\pi a^2 \sigma$ 5	0	$-a$	5
හැන්ද	$\dfrac{19\pi a^2 \sigma}{2}$ 5	$\overline{x}$	$\overline{y}$	

$$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2}\,\overline{y} = \pi a^2 \sigma . \pi a + \frac{\pi a^2 \sigma}{2}\left(2\pi a + \frac{2a}{\pi}\right) + 8\pi a^2 \sigma(-a) \quad 10$$

$$\frac{19\pi}{2}\,\overline{y} = -8\pi a + 2\pi a + a \quad 5$$

$$\therefore \quad \overline{y} = \frac{-2}{19\pi}\,(8\pi - 2\pi^2 - 1)a$$

$\therefore$ හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OA සිට $\dfrac{2}{19\pi}\,(8\pi - 2\pi^2 - 1)\,a$ දුරක් පහළින් පිහිටයි.

$$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2}\,\overline{x} = \pi a^2 \sigma .\ 2a + \frac{\pi a^2 \sigma}{2}\ .\ a + 8\pi a^2 \sigma . 0 \quad 10$$

$$\therefore \quad \frac{19}{2}\,\overline{x} = 2a + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}$$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{5a}{19} \quad 5$$

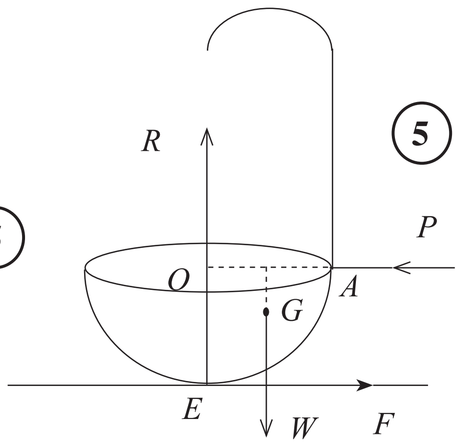
$\therefore$ හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OD සිට $\dfrac{5a}{19}$ දුරකින් පිහිටයි.

65

$\rightarrow \quad F = P$ 5

$\uparrow \quad R = W$ 5

$E \curvearrowleft \quad P \times 2a = W \times \frac{5}{19} a$ 5



$\therefore \ P = \frac{5}{38} W.$

$\Rightarrow \ F = \frac{5}{38} W.$

$\frac{F}{R} \quad \frac{5}{38}$ 5

$\therefore \ \frac{1}{7} > \frac{F}{R}$ 5

ඒ නයින්, හැන්ද සමතුලිතතාවේ තැබිය හැක.

30

---

17. (*a*) ආරම්භයේ දී එක එකක් සුදු පාට හෝ කළු පාට වූ, පාටින් හැර අන් සැම අයුරකින්ම සමාන බෝල 3 ක් පෙට්ටියක අඩංගු වේ. දැන්, පාටින් හැර අන් සැම අයුරකින්ම පෙට්ටියේ ඇති බෝලවලට සමාන සුදු පාට බෝලයක් පෙට්ටිය තුළට දමා ඉන්පසු සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ.

පෙට්ටියේ ඇති බෝලවල ආරම්භක සංයුති හතර සම සේ හව්‍ය වේ යැයි උපකල්පනය කරමින්,

(i) ඉවතට ගත් බෝලය සුදු පාට එකක් වීමේ,

(ii) ඉවතට ගත් බෝලය සුදු පාට එකක් බව දී ඇති විට ආරම්භයේ දී පෙට්ටිය තුළ හරියටම කළු පාට බෝල 2 ක් තිබීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) μ හා σ යනු පිළිවෙළින් $\{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ අගයන් කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය යැයි ගනිමු. $\{\alpha x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ අගයන් කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න; මෙහි α යනු නියතයකි.

එක්තරා සමාගමක සේවකයින් 50 දෙනකුගේ මාසික වැටුප් පහත වගුවේ සාරාංශගත කර ඇත:

මාසික වැටුප (රුපියල් දහසේ ඒවායින්)	සේවකයින් ගණන
5 – 15	9
15 – 25	11
25 – 35	14
35 – 45	10
45 – 55	6

සේවකයින් 50 දෙනාගේ මාසික වැටුප්වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

වසරක ආරම්භයේ දී එක් එක් සේවකයාගේ මාසික වැටුප $p\%$ වලින් වැඩි කරනු ලැබේ. ඉහත සේවකයින් 50 දෙනාගේ නව මාසික වැටුප්වල මධ්‍යන්‍යය රුපියල් 29 172 බව දී ඇත. p හි අගය හා සේවකයින් 50 දෙනාගේ නව මාසික වැටුප්වල සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

(*a*) $i = 0, 1,2, 3$ සඳහා E_i යනු සුදුපාට බෝල i ගණනක් ඇති පෙට්ටියේ සංයුතිය යැයි ගනිමු.

එවිට $P(E_i) = \dfrac{1}{4}$, $i = 0, 1,2, 3$ සඳහා

W යනු සසම්භාවී ලෙස ඉවතට ගත් බෝලය සුදුපාට වීමේ සිද්ධිය යැයි ගනිමු.

එවිට,

(i) $$\mathrm{P}(W) = \sum_{i=0}^{3} P(W \mid E_i)\, P(E_i) \quad 10$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{4} \times \frac{1}{4} \quad 10$$

$$= \frac{5}{8} \quad 5$$

$\boxed{25}$

(ii) බේස් ප්‍රමේයයට අනුව,

$$P(E_1 \mid \mathrm{W}) = \frac{P(W \mid E_1)\, P(E_1)}{P(W)} \quad 10$$

$$= \frac{\frac{2}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} \quad 10$$

$$= \frac{1}{5} \quad 5$$

25

(*b*) $Y = \{\alpha x_i : \; i = 1, 2, \ldots, n\}$ යැයි ගනිමු.

මධ්‍යන්‍යය : $\mu_y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)}{n} = \alpha\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \alpha\mu$ 5 + 5

විචලතාව : $\sigma_y^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)^2}{n} - \mu_y^2$ 5

$= \alpha^2\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \mu^2\right]$ 5

$= \alpha^2\sigma^2$ 5

$\therefore$ සම්මත අපගමනය $\sigma_y = |\alpha|\,\sigma$ 5

30

මාසික වැටුප (රුපියල් දහසේ ඒවායින්)	f	මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය x (5)	$y = \frac{1}{10}x$	y^2	fy (5)	fy^2 (5)
5 - 15	9	10	1	1	9	9
15 - 25	11	20	2	4	22	44
25 - 35	14	30	3	9	42	126
35 - 45	10	40	4	16	40	160
45 - 55	6	50	5	25	30	150
	50				$\sum fx = 143$ (5)	$\sum fx^2 = 489$ (5)

$\mu_y = \dfrac{\sum fy}{\sum f} = \dfrac{143}{50}$ 5 හා $\sigma_y^2 = \dfrac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2 = \dfrac{489}{50} - \left(\dfrac{143}{50}\right)^2$ 5

$\sigma_y = \dfrac{\sqrt{4001}}{50}$ 5

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් :

$\mu_x = 10\mu_y = 10\left(\frac{143}{50}\right) = 28.6$ රුපියල් දහසේ ඒවා 5

(= රු. 28600)

හා $\sigma_x = 10\sigma_y = \frac{\sqrt{4001}}{5} \approx 12.65$ රුපියල් දහසේ ඒවා 5

($\approx$ රු. 12650)

50

නව මාසික වේතනය : $z = x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x,$ මෙහි x යනු කලින් මාසික වේතනයයි.

5

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් : $\mu_z = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\mu_x$

$29172 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)28600$ 5

$\Rightarrow \frac{29172}{286} = 100 + p \qquad \therefore\ p = 2$ 5

$\sigma_z \approx \left(1 + \frac{2}{100}\right)\sigma_x$

$\approx \frac{51}{50} \times 12.65$ 5

≈ 12.9 රුපියල් දහසේ ඒවා

($\approx$ රු. 12900)

20
